1. Naći integralnu sumu S_n funkcije $f(x) = 1 + x$ na segmentu $[-1, 4]$ deleći ga na n jednakih delova i uzimajući za istaknute tačke ξ_i $(i = \overline{0, n-1})$ sredine tih razmaka.

◀ Očigledno je $\Delta\, x_i = \frac{5}{n}$. Prema uslovu je $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ $(i = \overline{0, n-1})$. Pošto je $x_i = -1 + \frac{5i}{n}$, $x_{i+1} = -1 + \frac{5(i+1)}{n}$, $f(\xi_i) = 1 + \xi_i$, to je

$$S_n = \frac{5}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{5}{n} \left(i + \frac{1}{2} \right) = \frac{25}{n^2} \left(\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{2} \right) = 12,5. \ \blacktriangleright$$

2. Za datu funkciju f naći donju $\underline{S}_n$ i gornju $\overline{S}_n$ integralnu sumu na datim odsečcima, deleći ih na n jednakih delova, ako je:

a) $f(x) = x^3, -2 \leq x \leq 3$; b) $f(x) = \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1$;

c) $f(x) = 2^x, 0 \leq x \leq 10$.

◀ a) Pošto je funkcija $f(x) = x^3$ neprekidna i rastuća na segmentu $[-2, 3]$, to ona postiže redom najmanju i najveću vrednost na levom i desnom kraju segmenta $[x_i, x_{i+1}]$ kada $x \in [x_i, x_{i+1}]$, pri proizvoljnoj podeli $P = \{x_0 = -2 < x_1 < \dots < x_n = 3\}$ segmenta $[-2, 3]$. Prema uslovu je $\Delta\, x_i = \frac{5}{n}, x_i = -2 + \frac{5i}{n}$ $(i = \overline{0, n})$. Na taj način je

$$\underline{S}_n = \frac{5}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(-2 + \frac{5i}{n} \right)^3, \ \overline{S}_n = \frac{5}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(-2 + \frac{5i}{n} \right)^3.$$

Uzimajući u obzir da je

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}, \ \sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}, \ \sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4},$$

konačno dobijamo

$$\underline{S}_n = 16\frac{1}{4} - \frac{176}{2n} + \frac{125}{4n^2}, \ \overline{S}_n = 16\frac{1}{4} + \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}.$$

Način rešavanja primera **b)** i **c)** je isti kao kod primera **a)** zato navodimo samo konačan rezultat:

b)

$$\underline{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\frac{i}{n}}, \ \overline{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}};$$

c)

$$\underline{S}_n = \frac{10230}{n\left(2^{\frac{10}{n}} - 1\right)}, \ \overline{S}_n = \frac{10230 \cdot 2^{\frac{10}{n}}}{n\left(2^{\frac{10}{n}} - 1\right)}. \ ▶$$

3. Naći donju integralnu sumu za funkciju $f(x) = x^4$ na segmentu $[1, 2]$, deleći ga na delove čije dužine čine geometrijski niz. Čemu je jednak limes te sume kad $n \to \infty$?

◀ Po uslovu je $x_i = x_0 q^i$ ($i = \overline{1, n}$), $x_0 = 1$, $x_n = 2$, odakle je, $x_i = 2^{\frac{i}{n}}$ $(i = \overline{0, n})$. Zbog neprekidnosti i rastućosti funkcije $f(x) = x^4$ na svakom od segmenata podele $[x_i, x_{i+1}]$, to ona postiže najmanju vrednost u tački x_i $(i = \overline{0, n-1})$, sledi (računjući da je $\Delta\, x_i = 2^{\frac{i}{n}} \cdot \left(\sqrt[n]{2} - 1\right)$),

$$\underline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{\frac{4i}{n}} \cdot 2^{\frac{i}{n}}\left(\sqrt[n]{2} - 1\right) = \left(\sqrt[n]{2} - 1\right)\sum_{i=0}^{n-1} 2^{\frac{5i}{n}} = \frac{\left(\sqrt[n]{2} - 1\right)\left(2^5 - 1\right)}{\sqrt[n]{32} - 1}.$$

Prelaskom na graničnu vrednost kad $n \to \infty$, dobijamo (podelimo najpre brojilac i imenilac sa $\frac{1}{n}$): $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{S}_n = 31\frac{\ln 2}{\ln 32} = \frac{31}{5}$.

1. Koristeći integralne sume izračunati odredjene integrale:

a) $\int\limits_0^1 a^x dx, \quad (a > 0, \ a \neq 1);$ b) $\int\limits_{-1}^2 x^2\, dx$ c) $\int\limits_1^2 x^3\, dx.$

Rešenje: Pošto su podintegralne funkcije neprekidne, ovi odredjeni integrali postoje. Znači, kad $\delta_T \to 0$, $\lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T$ postoji bez obzira na izbor podele T i izbor tačaka $\{\xi_i\}$.

a) Označimo sa T_n, $n \in \mathbf{N}$, podele intervala $[0,1]$ tačkama oblika $x_k = \dfrac{k}{n}$, $k = 0, 1, ..., n$ i izaberimo $\xi_k = \dfrac{k}{n}$, $k = 0, 1, ..., n-1$. Na taj način dobija se niz parcijalnih suma

$$\sigma_{T_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a^{k/n} = \frac{a-1}{n(a^{1/n}-1)}.$$

Očigledno, kad $n \to \infty$ i $\delta_{T_n} \to 0$ te je

$$\int\limits_0^1 a^x\, dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_{T_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a-1}{\dfrac{a^{1/n}-1}{1/n}} = \frac{a-1}{\ln\, a};$$

b) Slično se dobija da je za $n \in \mathbf{N}$

$$\sigma_{T_n} = \frac{3}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(-1+\frac{3k}{n}\right)^2 = \frac{3}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{6}{n}k+\frac{9}{n^2}k^2\right) =$$

$$= \frac{3}{n}\left(n - \frac{6}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \frac{9}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right) = \frac{3}{n}\left(n - \frac{3(n-1)}{2n}\right).$$

odakle sledi

$$\int_{-1}^{2} x^2\,dx = 3 \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{3(n-1)}{2n^2}\right) = 3.$$

c) U ovom zadatku interval integracije nećemo podeliti na podintervale jednakih dužina. Naime, biraćemo n tačaka intervala $[1,2]$ koje obrazuju geometijsku progresiju, odnosno $x_k = qx_{k-1}, \quad k = 1,\ldots,n$. Za $x_0 = 1$ i $x_n = 2$, iz $x_n = q^n x_0$ sledi $q = \sqrt[n]{2}$, kao i $\Delta x_k = 2^{(k-1)/n}(\sqrt[n]{2} - 1)$. Na taj način dobija se niz parcijalnih suma

$$\sigma_{T_n} = \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}^3 \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 2^{4(k-1)/n}\left(\sqrt[n]{2} - 1\right).$$

Kako je $\sum_{k=1}^{n} 2^{4(k-1)/n}$ zbir prvih n članova geometrijske progresije važi

$$\begin{aligned} \sigma_{T_n} &= \left(\sqrt[n]{2} - 1\right) \frac{2^4 - 1}{\left(\sqrt[n]{2}\right)^4 - 1} \\ &= \frac{15}{\left(\sqrt[n]{2}\right)^3 + \left(\sqrt[n]{2}\right)^2 + \sqrt[n]{2} + 1}. \end{aligned}$$

Odavde sledi $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{T_n} = \frac{15}{4}$, pa je $\int_1^2 x^3 dx = \frac{15}{4}$.

Primetimo da su nizovi integralnih suma koje smo koristili zapravo nizovi donjih Darbuovih suma.

4. Pokazati da funkcija Dirihlea[6]

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ iracionalan broj,} \\ 1, & x \text{ racionalan broj,} \end{cases}$$

nije $R-$integrabilna ni na jednom intervalu.

Rešenje: Neka je $[a, b]$ proizvoljan interval a T njegova proizvoljna podela. Ako u svakom intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ izaberemo da je ξ_i iracionalan broj dobija se

$$\sigma_T = \sum_{k=1}^{k_T} \lambda(\xi_k)\Delta x_k = 0 \text{ pa je } \lim_{\delta_T \to 0} \sigma_T = 0.$$

Ako izaberemo da sve tačke ξ_i budu racionalni brojevi dobija se

$$\sigma_T = \sum_{k=1}^{T_k} \lambda(\xi_k)\Delta x_k = b - a \quad \text{odakle je } \lim_{\delta_T \to 0} \sigma_T = b - a.$$

Pošto granična vrednost integralnih suma zavisi od izbora tačaka ξ_i funkcija λ nije integrabilna na $[a, b]$.